Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

Факультет цифровых технологий и химического инжиниринга

Кафедра информационных компьютерных технологий

**ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ № 13**

**ПО КУРСУ**

**«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СРЕДЕ MATLAB»:**

**«Системы дифф. уравнений»**

Ведущий преподаватель

Доцент кафедры ИКТ Филиппова Е.Б.

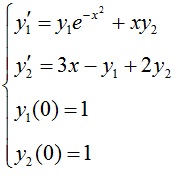
**СТУДЕНТ группы КС-20** Мелехин А.А.

**Москва**

**2024**

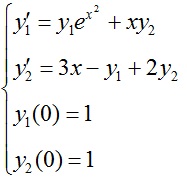
# **Задание**

**1.** Методами Эйлера, модифицированным Эйлера и Рунге-Кутта 4 порядка c шагом h=0.1 до Xкон= 1 решить следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка:



Оценку жёсткости системы производить на каждом шаге h. Вывести на один график результаты всех трёх методов.

**2**. Решить следующую задачу Коши для нормальной системы второго порядка методами явным Эйлера и неявным Эйлера c шагом h=0.1 до Хкон= 3:



Оценку жёсткости системы производить на каждом шаге h. Вывести на один график результаты обоих методов.

**Код (программа task1.m)**

clc; clear;

% Инициализация переменных для явного метода Эйлера

x(1) = 0;

y1(1) = 1;

y2(1) = 1;

h = 0.1;

i = 1;

disp('Числа жёсткости')

while(x(i) < 1)

g = [exp(-x(i).^2), x(i); -1, 2];

s = max(real(eig(g))) / min(real(eig(g)));

fprintf('%d %d\n', i, s);

i = i + 1;

y1(i) = y1(i-1) + (y1(i-1) \* exp(-x(i-1).^2) + x(i-1) \* y2(i-1)) \* h;

y2(i) = y2(i-1) + (3 \* x(i-1) - y1(i-1) + 2 \* y2(i-1)) \* h;

x(i) = x(i-1) + h;

end

fprintf('\n\n');

% Вывод найденных значений функции явного метода Эйлера

fprintf('Значения функции y1 = f1(x) по явному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y1(i))]);

fprintf('\n');

end

fprintf('\n');

fprintf('Значения функции y2 = f2(x) по явному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y2(i))]);

fprintf('\n');

end

disp('\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_')

% Инициализация переменных для метода Эйлера-Коши

x(1) = 0;

y\_1(1) = 1;

y\_2(1) = 1;

y1(1) = y\_1(1);

y2(1) = y\_2(1);

h = 0.1;

h2 = h / 2;

i = 1;

while(x(i) < 1)

i = i + 1;

y\_1(i) = y\_1(i-1) + (y\_1(i-1) \* exp(-x(i-1).^2) + x(i-1) \* y\_2(i-1)) \* h;

y\_2(i) = y\_2(i-1) + (3 \* x(i-1) - y\_1(i-1) + 2 \* y\_2(i-1)) \* h;

y1(i) = y1(i-1) + (y1(i-1) \* exp(-x(i-1).^2) + x(i-1) \* y2(i-1) + y1(i-1) \* exp(-x(i-1).^2) + x(i-1) \* y2(i-1)) \* h2;

y2(i) = y2(i-1) + (3 \* x(i-1) - y1(i-1) + 2 \* y2(i-1) + 3 \* x(i-1) - y\_1(i-1) + 2 \* y\_2(i-1)) \* h2;

x(i) = x(i-1) + h;

end

% Вывод найденных значений функции метода Эйлера-Коши

fprintf('Значения функции y1 = f1(x) по методу Эйлера-Коши:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y\_1(i))]);

fprintf('\n');

end

fprintf('Значения функции y2 = f2(x) по методу Эйлера-Коши:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y\_2(i))]);

fprintf('\n');

end

disp('\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_')

% Инициализация переменных для метода Рунге-Кутта

x(1) = 0;

y1(1) = 1;

y2(1) = 1;

h = 0.1;

h2 = h / 2;

i = 1;

while(x(i) < 1)

i = i + 1;

k1 = (y1(i-1) \* exp(-x(i-1).^2) + x(i-1) \* y2(i-1)) \* h;

l1 = (3 \* x(i-1) - y1(i-1) + 2 \* y2(i-1)) \* h;

k2 = ((y1(i-1) + k1 / 2) \* exp(-(x(i-1) + h2).^2) + (x(i-1) + h2) \* (y2(i-1) + l1 / 2)) \* h;

l2 = (3 \* (x(i-1) + h2) - (y1(i-1) + k1 / 2) + 2 \* (y2(i-1) + l1 / 2)) \* h;

k3 = ((y1(i-1) + k2 / 2) \* exp(-(x(i-1) + h2).^2) + (x(i-1) + h2) \* (y2(i-1) + l2 / 2)) \* h;

l3 = (3 \* (x(i-1) + h2) - (y1(i-1) + k2 / 2) + 2 \* (y2(i-1) + l2 / 2)) \* h;

k4 = ((y1(i-1) + k3) \* exp(-(x(i-1) + h).^2) + (x(i-1) + h) \* (y2(i-1) + l3)) \* h;

l4 = (3 \* (x(i-1) + h) - (y1(i-1) + k3) + 2 \* (y2(i-1) + l3)) \* h;

delta1 = (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4) / 6;

delta2 = (l1 + 2 \* l2 + 2 \* l3 + l4) / 6;

y1(i) = y1(i-1) + delta1;

y2(i) = y2(i-1) + delta2;

x(i) = x(i-1) + h;

end

% Вывод найденных значений функции метода Рунге-Кутта

fprintf('Значения функции y1 = f1(x) по методу Рунге-Кутты:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y1(i))]);

fprintf('\n');

end

fprintf('Значения функции y2 = f2(x) по методу Рунге-Кутты:\n\n');

for i = 1:length(x)

disp([num2str(x(i)), ' ', num2str(y2(i))]);

fprintf('\n');

end

disp('\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_')

% Стандартные методы ODE45

% Определение начальных условий

y0 = [1; 1];

% Решение системы дифференциальных уравнений

[x\_ode, y\_ode] = ode45(@myODEs, [0, 1], y0);

% Построение всех графиков на одной фигуре

figure;

% Графики явного метода Эйлера

plot(x, y1, 'r', 'DisplayName', 'явный Эйлер y1');

hold on;

plot(x, y2, 'r', 'DisplayName', 'явный Эйлер y2');

% Графики метода Эйлера-Коши

plot(x, y\_1, 'g--', 'DisplayName', 'мод. Эйлер y1');

plot(x, y\_2, 'g--', 'DisplayName', 'мод. Эйлер y2');

% Графики метода Рунге-Кутта

plot(x, y1, 'b--', 'DisplayName', 'Рунге-Кутт y1');

plot(x, y2, 'b--', 'DisplayName', 'Рунге-Кутт y2');

% Графики метода ode45

plot(x\_ode, y\_ode(:,1), 'm', 'DisplayName', 'ode45 y1');

plot(x\_ode, y\_ode(:,2), 'c', 'DisplayName', 'ode45 y2');

grid on;

xlabel 'x';

ylabel 'y';

legend;

title('Решение системы дифференциальных уравнений');

hold off;

% Определение функции myODEs

function dydx = myODEs(x, y)

dydx = [y(1) \* exp(-x.^2) + x \* y(2); 3 \* x - y(1) + 2 \* y(2)];

end

**Код (Программа task2.m)**

clc; clear;

% Эйлер явный

x\_explicit(1) = 0;

y1\_explicit(1) = 1;

y2\_explicit(1) = 1;

h = 0.1;

i = 1;

disp('Числа жёсткости')

while(x\_explicit(i) < 1)

g = [exp(x\_explicit(i).^2), x\_explicit(i); -1, 2];

s = max(real(eig(g))) / min(real(eig(g)));

fprintf('%d %d\n', i, s);

i = i + 1;

y1\_explicit(i) = y1\_explicit(i-1) + (y1\_explicit(i-1) \* exp(-x\_explicit(i-1).^2) + x\_explicit(i-1) \* y2\_explicit(i-1)) \* h;

y2\_explicit(i) = y2\_explicit(i-1) + (3 \* x\_explicit(i-1) - y1\_explicit(i-1) + 2 \* y2\_explicit(i-1)) \* h;

x\_explicit(i) = x\_explicit(i-1) + h;

end

fprintf('\n\n');

% Вывод найденных значений функции

fprintf('Значения функции y1 = f1(x) по явному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x\_explicit)

disp([num2str(x\_explicit(i)), ' ', num2str(y1\_explicit(i))]);

fprintf('\n');

end

fprintf('\n');

fprintf('Значения функции y2 = f2(x) по явному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x\_explicit)

disp([num2str(x\_explicit(i)), ' ', num2str(y2\_explicit(i))]);

fprintf('\n');

end

disp('\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_')

% Эйлер неявный

x\_implicit(1) = 0;

y1\_implicit(1) = 1;

y2\_implicit(1) = 1;

y1(1) = y1\_implicit(1);

y2(1) = y2\_implicit(1);

h = 0.1;

h2 = h / 2;

i = 1;

while(x\_implicit(i) < 1)

i = i + 1;

y1\_implicit(i) = y1\_implicit(i-1) + (y1\_implicit(i-1) \* exp(x\_implicit(i-1).^2) + x\_implicit(i-1) \* y2\_implicit(i-1)) \* h;

y2\_implicit(i) = y2\_implicit(i-1) + (3 \* x\_implicit(i-1) - y1\_implicit(i-1) + 2 \* y2\_implicit(i-1)) \* h;

y1(i) = y1(i-1) + (y1(i-1) \* exp(x\_implicit(i-1).^2) + x\_implicit(i-1) \* y2(i-1) + y1(i-1) \* exp(x\_implicit(i-1).^2) + x\_implicit(i-1) \* y2(i-1)) \* h2;

y2(i) = y2(i-1) + (3 \* x\_implicit(i-1) - y1(i-1) + 2 \* y2(i-1) + 3 \* x\_implicit(i-1) - y1\_implicit(i-1) + 2 \* y2\_implicit(i-1)) \* h2;

x\_implicit(i) = x\_implicit(i-1) + h;

end

% Вывод найденных значений функции

fprintf('Значения функции y1 = f1(x) по неявному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x\_implicit)

disp([num2str(x\_implicit(i)), ' ', num2str(y1\_implicit(i))]);

fprintf('\n');

end

fprintf('Значения функции y2 = f2(x) по неявному методу Эйлера:\n\n');

for i = 1:length(x\_implicit)

disp([num2str(x\_implicit(i)), ' ', num2str(y2\_implicit(i))]);

fprintf('\n');

end

disp('\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_')

% Стандартные методы ODE15s

% Определение начальных условий

y0 = [1; 1];

% Решение системы дифференциальных уравнений

[x\_ode15s, y\_ode15s] = ode15s(@myODEs, [0, 1], y0);

% Визуализация результатов

figure

hold on

plot(x\_explicit, y1\_explicit, 'r', 'DisplayName', 'Явный Эйлер y1');

plot(x\_explicit, y2\_explicit, 'g', 'DisplayName', 'Явный Эйлер y2');

plot(x\_implicit, y1\_implicit, 'b', 'DisplayName', 'Неявный Эйлер y1');

plot(x\_implicit, y2\_implicit, 'm', 'DisplayName', 'Неявный Эйлер y2');

plot(x\_ode15s, y\_ode15s(:,1), 'k--', 'DisplayName', 'MATLAB y1 (ODE15s)');

plot(x\_ode15s, y\_ode15s(:,2), 'c--', 'DisplayName', 'MATLAB y2 (ODE15s)');

grid on

xlabel('x');

ylabel('y');

legend;

title('Решение системы дифференциальных уравнений');

hold off

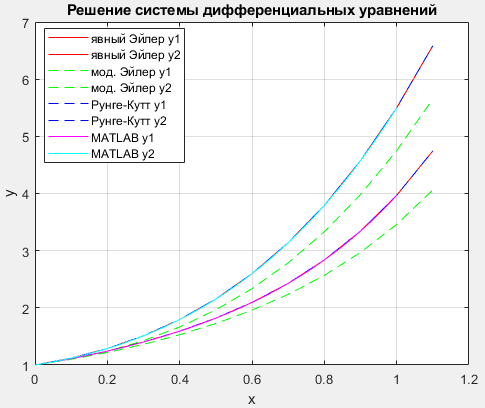
% Определение функции myODEs

function dydx = myODEs(x, y)

dydx = [y(1) \* exp(x.^2) + x \* y(2); 3 \* x - y(1) + 2 \* y(2)];

end

**Результаты расчётов (task1.m)**



Числа жёсткости

1 2

2 1.714957e+00

3 1.435182e+00

4 1

5 1

6 1

7 1

8 1

9 1

10 1

11 1

Значения функции y1 = f1(x) по явному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.2199

0.3 1.3619

0.4 1.5292

0.5 1.7261

0.6 1.9588

0.7 2.2355

0.8 2.5676

0.9 2.9694

1 3.4597

1.1 4.0619

Значения функции y2 = f2(x) по явному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.24

0.3 1.426

0.4 1.665

0.5 1.9651

0.6 2.3355

0.7 2.7868

0.8 3.3305

0.9 3.9799

1 4.7489

1.1 5.6528

Значения функции y1 = f1(x) по методу Модифицированного Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.2199

0.3 1.3619

0.4 1.5292

0.5 1.7261

0.6 1.9588

0.7 2.2355

0.8 2.5676

0.9 2.9694

1 3.4597

1.1 4.0619

Значения функции y2 = f2(x) по методу Модифицированного Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.24

0.3 1.426

0.4 1.665

0.5 1.9651

0.6 2.3355

0.7 2.7868

0.8 3.3305

0.9 3.9799

1 4.7489

1.1 5.6528

Значения функции y1 = f1(x) по методу Рунге-Кутты:

0 1

0.1 1.1104

0.2 1.2433

0.3 1.4022

0.4 1.5921

0.5 1.8198

0.6 2.0945

0.7 2.4284

0.8 2.8375

0.9 3.342

1 3.9674

1.1 4.7451

Значения функции y2 = f2(x) по методу Рунге-Кутты:

0 1

0.1 1.121

0.2 1.2887

0.3 1.5106

0.4 1.7957

0.5 2.1541

0.6 2.5974

0.7 3.1387

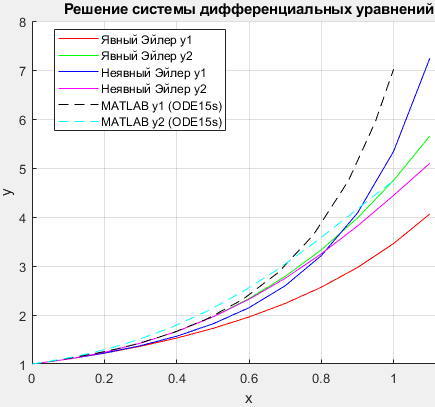
0.8 3.7922

0.9 4.5734

1 5.4988

* 1. 6.5851

**Результаты расчётов (task2.m)**



Числа жёсткости

1 2

2 1.677418e+00

3 1.257187e+00

4 1

5 1

6 1

7 1

8 1

9 1

10 1

11 1

Значения функции y1 = f1(x) по явному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.2199

0.3 1.3619

0.4 1.5292

0.5 1.7261

0.6 1.9588

0.7 2.2355

0.8 2.5676

0.9 2.9694

1 3.4597

1.1 4.0619

Значения функции y2 = f2(x) по явному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.24

0.3 1.426

0.4 1.665

0.5 1.9651

0.6 2.3355

0.7 2.7868

0.8 3.3305

0.9 3.9799

1 4.7489

1.1 5.6528

Значения функции y1 = f1(x) по неявному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.2221

0.3 1.3741

0.4 1.5672

0.5 1.8177

0.6 2.1491

0.7 2.5963

0.8 3.2125

0.9 4.0816

1 5.3427

1.1 7.2392

Значения функции y2 = f2(x) по неявному методу Эйлера:

0 1

0.1 1.1

0.2 1.24

0.3 1.4258

0.4 1.6635

0.5 1.9595

0.6 2.3197

0.7 2.7487

0.8 3.2488

0.9 3.8173

1 4.4426

1.1 5.0969